



CONCURSO DE ADMISSÃO  
AO  
CURSO DE FORMAÇÃO E GRADUAÇÃO  
MATEMÁTICA



CADERNO DE QUESTÕES

2021/2022

1ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Seis irmãos conversavam quando um deles, Matias, enunciou: a soma das idades de todos nós é cinco vezes a minha idade atual e sou seis anos mais novo que Sófocles. Quando Sófocles tiver três vezes a minha idade atual, constataremos que:

- a soma da minha idade com a de Dâmocles será igual à soma da idade atual dos irmãos de César;
- a idade de Erastóstenes será três vezes a idade dele atual; e
- a idade do Lutero será duas vezes a idade atual do Sófocles, mais um ano.

Diante do exposto, qual é a soma das idades atuais de Sófocles e Matias?

2ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Suponha que  $a$  e  $b$  são raízes reais e diferentes da equação  $4x^2 - 4tx - 1 = 0$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). O intervalo  $[a, b]$  é o domínio da função  $f(x) = \frac{2x - t}{x^2 + 1}$ . Seja  $g(t) = \max f(x) - \min f(x)$ . Determine  $g(0)$ .

3ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Em um triângulo de vértices  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 4)$  e  $C(6, 0)$ , toma-se um ponto variável  $M$  sobre o lado  $AB$ . Desse ponto, traça-se a perpendicular ao lado  $AC$  que intercepta em  $Q$ . Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção das retas  $BQ$  e  $CM$  e escreva a sua equação.

4ª QUESTÃO

Valor: 1,0

Seja um tetraedro regular  $ABCD$  de aresta  $a$  e o ponto  $Q$  médio de  $AB$ . O ponto  $P$  sobre a aresta  $AB$ , entre  $Q$  e  $A$ , é projetado nas arestas  $AC$  e  $AD$ , sobre os pontos  $M$  e  $M'$ , respectivamente, e também nas arestas  $BC$  e  $BD$ , sobre os pontos  $N$  e  $N'$ , respectivamente. O plano  $MM'NN'$  divide o tetraedro em dois volumes com razão de 1 para 4. Determine  $QP$  em função de  $a$ .

<b>5ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Considere o sistema a seguir:</p> $\begin{cases} 3x + 2y - z = ky \\ (1 - k)x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - kz = z \end{cases}$ <p>Determine o menor valor da constante real <math>k</math> que torna o sistema indeterminado. Para esse valor de <math>k</math>, encontre a solução <math>x, y, z</math> do sistema acima que minimiza o valor de <math>(x - z)^2 + e^{x+y} - 4 x  - 2y</math>.</p>	
<b>6ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Determine o subconjunto de <math>\mathbb{R}</math> que corresponde à solução da equação:</p> $4^{\log_2 \sin(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0.$	
<b>7ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Sejam os pontos <math>a</math> e <math>b</math>, no plano complexo, representados pelos números <math>a = 9 + xi</math> e <math>b = y + 3i</math>, onde <math>i</math> é a unidade imaginária tal que <math>i^2 = -1</math>. O ponto <math>a</math> é a rotação de <math>30^\circ</math> do ponto <math>b</math> em torno da origem no sentido anti-horário. Determine o valor do produto <math>xy</math>.</p>	
<b>8ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Em uma sala com 11 estudantes, um professor decidiu aplicar um trabalho dividindo aleatoriamente a turma em três grupos de 3 estudantes e um grupo de 2 estudantes. Sabendo que na turma há um casal, qual é a probabilidade de que o mesmo faça o trabalho junto?</p>	
<b>9ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Sabendo-se que <math>\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}</math> com <math>a \neq 0, b \neq 0</math> e <math>a + b \neq 0</math>, determine <math>\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}</math> em função de <math>a</math> e <math>b</math> somente.</p>	
<b>10ª QUESTÃO</b>	<b>Valor: 1,0</b>
<p>Seja um triângulo acutângulo <math>\triangle ABC</math> onde <math>h_B</math> e <math>h_C</math> são as alturas dos vértices <math>B</math> e <math>C</math>, respectivamente, e <math>\overline{BC} = a</math>. Sabendo-se que <math>\frac{h_B h_C}{a^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}</math> e <math>\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C} = \frac{p}{q\sqrt{m}}</math>, calcule <math>p + q + m</math>.</p> <p><b>Dados:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>p, q</math> e <math>m</math> são números naturais;</li> <li>• <math>p</math> e <math>q</math> são primos entre si; e</li> <li>• <math>m</math> é o menor possível.</li> </ul>	